Zur Interpretation der Quantenmechanik

Von Wolfgang Weidlich

Aus dem Institut für Theoretische Physik der Freien Universität Berlin

(Z. Naturforschg. 15 a, 651—654 [1960]; eingegangen am 23. Mai 1960)

Es werden allgemeine Bedingungen angegeben für den Zusammenhang eines möglichen Parameterraumes, in dem eine determinierte Beschreibung physikalischer Systeme stattfinden soll, mit dem Hilbert-Raum der Quantenmechanik. Vorausgesetzt ist die Gültigkeit der quantentheoretischen Meßaxiome und Bewegungsgleichungen.

Die nichtrelativistische Quantenmechanik kann sowohl in ihrer mathematischen Formulierung, wie in ihrer statistischen Interpretation beim Vergleich mit dem Experiment als eine im Grundsätzlichen abgeschlossene Theorie betrachtet werden. Es gibt jedoch über diesen Rahmen hinausgehende Probleme prinzipieller Art, die noch nicht als endgültig gelöst angesehen werden können. Vor allem zwei Fragen bedürfen einer weiteren Klärung:

Einmal handelt es sich um ein tieferes Verständnis des Meßprozesses (vgl. Ludwig [1]), worauf wir hier nicht eingehen. Es soll nur erwähnt werden, daß damit der Unterschied zusammenhängt zwischen „subjektiver“ Auffassung, wonach der Akt der Kenntnisnahme des Meßergebnisses nicht eliminierbar und für die Festlegung des quantenmechanischen Zustandes entscheidend ist, und „objektiver“ Auffassung, wonach die Meßwerte an der Apparatur unabhängig von der Kenntnisnahme fixiert sind. Andererseits besteht weiterhin die alte Frage nach dem tieferen Grunde des Indeterminismus in der Quantentheorie. Zwei Antworten scheinen im Prinzip möglich zu sein:

1. Die statistische Deutung der Quantenmechanik ist deshalb notwendig, weil der Indeterminismus in der Natur der Elementarteilchen selbst begründet ist. Letztere sind Substrate potentieller Eigenschaften, die in bestimmter Weise untereinander gekoppelt sind, so daß z. B. komplementäre Eigenschaften nicht zugleich wirklich sein können. Diese Eigenschaften bilden zusammen einen nichtdistributiven, komplementären Verband, welcher adäquat durch den Verband der Teilräume eines Hilbert-Raumes beschrieben wird. Oder aber:

2. Die Statistik ist nicht eliminierbar, obwohl die Eigenschaften der Elementarteilchen im Grunde genommen stets determiniert sind. Der Indeterminismus in den Aussagen der Quantentheorie kommt dadurch zustande, daß die im Rahmen der Physik durchführbaren Messungen prinzipiellen Schranken unterliegen und sich in bestimmter Weise gegenseitig stören, so daß gerade nur die Aussagen der Quantenmechanik möglich sind.

Wir wollen im folgenden die zweite Denkmöglichkeit näher untersuchen. Sie bedeutet, daß es „verborgene Parameter“ gibt, welche, falls sie bekannt wären, die Elementarsysteme eindeutig determinieren würden. (Der v. Neumannsche [2] Beweis, daß es im Rahmen der Quantentheorie keine nichtstreuenden Zustände und demnach keine alles determinierenden Parameter gibt, besagt natürlich nichts gegen die Möglichkeit der Existenz solcher Parameter in einem umfassenderen Rahmen, aus dem die Quantenmechanik selbst erst durch gewisse Mittelungsprozesse o. ä. folgen würde.) Es ist nun von verschiedenen Autoren (vgl. Anm. [3–6]) versucht worden, konkrete Systeme verborgener Parameter anzugeben, aus denen sich dann in bestimmter Weise die quantenmechanischen Meßgrößen und für diese geltenden Gesetze ergeben sollen. Messungen dürfen dabei die determinierenden Parameter nur in dem Maß festlegen, daß sich bei nachfolgender Messung einer anderen Observablen gerade die quantenmechanischen Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Meßwerte ergeben. Es zeigt sich nun, daß man zur Darstellung dieses Zusammenhanges zwischen einem möglichen Raum verborgener Parameter und dem Hilbert-Raum der Quantentheorie weitgehend nur allgemeine Struktureigenschaften dieser Räume braucht. Diese, sowie die Bedingungen dafür, daß es einerseits determinierende Eigenschaften für Elementarteilchen geben kann, obwohl anderer-

[1] G. Ludwig, Z. Phys. **135**, 483 [1953].
[2] J. v. Neumann, Mathematische Grundlagen der Quantentheorie, Verlag J. Springer 1932.
[3] D. Bohm, Phys. Rev. **85**, 166 [1952].
[4] F. Bopp, Z. Naturforschg. **9 a**, 579 [1954].
[5] W. Weizel, Z. Phys. **134**, 264 [1952].
[6] T. Takabayasi, Progr. Theor. Phys. **9**, 187 [1953]; **11**, 341 [1954].

seits nur die statistischen Aussagen der Quantentheorie verifiziert werden können, werden im folgenden dargestellt. Zum Schluß wird an einem einfachen Beispiel (dem Spinraum) gezeigt, daß sich ein zugehöriger Parameterraum konstruieren läßt, so daß diese Bedingungen erfüllt sind.

1. Der Parameterraum und seine Zuordnung zum Hilbert-Raum

Wir müssen zunächst festlegen, was wir unter einem determinierten physikalischen System verstehen wollen: In Übereinstimmung mit den Vorstellungen der klassischen Physik ist dies dann der Fall, wenn die Menge der möglichen Eigenschaften A, B, C, ... des Systems einen komplementären, atomaren, distributiven Verband bildet und der Übergang von der Zeit t_1 nach t_2 durch eine verbandsisomorphe Abbildung geschieht. Im einzelnen erfüllen die Verknüpfungen $A \cup B$ („A oder B"), $A \cap B$ („A und B"), also folgende Axiome:

(Verbandsaxiome):

α) $A \cup A = A$, $A \cap A = A$; $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $A \cap (A \cup B) = A$; $A \cup (A \cap B) = A$. $A \subseteq B$, wenn $A \cap B = A$.

(Distributivität):

β) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(Komplementarität):

γ) Es gibt die „immer erfüllte" Eigenschaft $\underline{1}$ und die „nie erfüllte" Eigenschaft 0, so daß für jedes A gilt:

$0 \subseteq A \subseteq \underline{1}$.

Zu jedem A existiert ein B, so daß

$A \cup B = \underline{1}$; $A \cap B = 0$.

(Existenz nichtverfeinerbare Eigenschaften):

δ) Es gibt nichtverfeinerbare Eigenschaften („Atome") E_1, E_2, so daß jedes $A \neq 0$ mindestens ein E enthält: $E \subseteq A$; Gilt für ein B: $B \subseteq E$, so ist $B = E$ oder $B = 0$.

Es läßt sich zeigen, daß ein solcher Verband immer isomorph zu einem Mengenverband ist. Die nichtverfeinerbaren Eigenschaften entsprechen den Elementen bzw. Punkten in diesem Mengenverband und letzterer soll schon der Raum Γ der verborgenen Parameter (VP-Raum) sein. Er entspricht dem Phasenraum der klassischen statistischen Mechanik, jedoch lassen wir hier die physikalische Bedeutung der Parameter offen. Durch einen Punkt x im VP-Raum Γ ist das physikalische System S eindeutig festgelegt, denn es steht für jede Eigenschaft A fest, ob sie auf S zutrifft oder nicht, je nachdem, ob $x \subseteq A$ oder $x \not\subseteq A$. Die zeitliche Entwicklung erfolgt durch eine Abbildung des VP-Raumes auf sich.

Wenn es für physikalische Systeme jeweils einen solchen VP-Raum gibt, so darf es jedoch nicht möglich sein, durch Messungen am System S eindeutig festzustellen, welcher Punkt $x(t) \in \Gamma$ zu S gehört; denn dann wäre im Widerspruch zur Quantentheorie alles determiniert. Vielmehr werden wir annehmen müssen, daß durch eine Messung an S nur mit einer Wahrscheinlichkeit $W(x)\, d\tau$ festgelegt wird, ob der zu S gehörige Parameterpunkt x in $d\tau$ liegt. Enthält $T(W) \subset \Gamma$ alle Punkte x mit $W(x) > 0$, dann muß sein:

$$\int_{T(W)} W(x)\, d\tau = 1\,. \qquad (1,1)$$

$T(W)$ heiße Träger von W. (Wir setzen voraus, daß sich in Γ Funktionen $W(x)$ und Integrationen darüber einführen lassen.)

Um nun den Zusammenhang mit der Quantentheorie herzustellen, betrachten wir zunächst die genauesten Messungen, die nach dieser möglich sind, d. h. solche, die einen Zustand $\varphi \in \mathfrak{H}$ festlegen. Es liegt nahe, jedem Zustand $\varphi \in \mathfrak{H}$ eine Wahrscheinlichkeits- bzw. Häufigkeitsverteilung $W(x)$ in Γ zuzuordnen, die ebenso wie φ nach der Messung vorliegen soll. Wird im Zustand φ die Observable $A = \sum_\nu a_\nu P_{\varphi_\nu}$ gemessen (P_{φ_ν} = Projektionsoperator auf φ_ν), so ergibt sich a_ν bzw. φ_ν mit der Wahrscheinlichkeit:

$$w(\varphi, \varphi_\nu) = \mathrm{Sp}(P_\varphi P_{\varphi_\nu}) = |(\varphi; \varphi_\nu)|^2. \qquad (1,2)$$

Dasselbe muß sich unter Benutzung der $W(x)$ in Γ ergeben, wenn kein Widerspruch zur Quantentheorie entstehen soll.

Die Messung der Observablen A ist nun so beschaffen, daß nach ihr nur Zustände φ_ν bzw. die zugehörigen $W_\nu(x)$ in Γ vorliegen können. Im VP-Raum stellt sich daher die Frage:

Wenn die Verteilung $W(x) \longleftrightarrow \varphi$ in Γ vorliegt, mit welcher a-priori-Wahrscheinlichkeit $w[W; W_\nu]$ stellen sich dann, durch die Messung bedingt, die neuen Verteilungen $W_\nu(x) \longleftrightarrow \varphi_\nu$ ein? Eine einfache wahrscheinlichkeitstheoretische Überlegung ergibt:

$$w[W; W_\nu] = \int\limits_{T(W) \cap T(W_\nu)} c(x)\, W(x)\, W_\nu(x)\, d\tau$$

mit

$$c(x) = (\sum_\nu W_\nu(x))^{-1}. \qquad (1,3)$$

Beweis: Beim Vorliegen der Anfangsverteilung $W^0(x) = \delta(x - x_0)$ ist die a-priori-Wahrscheinlichkeit $w[W^0, W_\nu]$ für die Herstellung einer der Verteilungen $W_\nu(x)$ durch die Messung an A offenbar gleich $w[W^0, W_\nu] = W_\nu(x_0) / \sum_\mu W_\mu(x_0)$. Für beliebige Anfangsverteilungen $W(x)$ folgt dann (1, 3).

Die Forderung der Übereinstimmung mit der Quantentheorie bedeutet nun:

$$w[W; W_\nu] = w(\varphi; \varphi_\nu) = \mathrm{Sp}(\Omega P_{\varphi_\nu});\ \ \Omega = P_\varphi. \quad (1,4)$$

Dies ist als Bedingung an W, W_ν zu verstehen. Wegen $w(\varphi_\nu; \varphi_\mu) = 0$ für $\varphi_\nu \perp \varphi_\mu$ ist daher

$$\int\limits_{T(W_\nu) \cap T(W_\mu)} c(x)\, W_\nu(x)\, W_\mu(x)\, d\tau = 0.$$

Da der Integrand positiv definit ist, muß

$$T(W_\nu) \cap T(W_\mu) = 0 \quad \text{sein für } \varphi_\nu \perp \varphi_\mu. \quad (1,5)$$

Für ein $x \in \Gamma$ ist also jeweils höchstens ein $W_\varrho(x)$ unter den zu einem vollständigen Orthogonalsystem gehörigen $W_\nu(x)$ ungleich 0, was bedeutet, daß zu jedem $x \in \Gamma$ höchstens ein Meßwert a_ϱ der Observablen A zugeordnet ist. Da andererseits zu jedem $x \in \Gamma$ genau ein Meßwert a_ϱ von A gehören soll, muß es auch ein $W_\varrho(x) > 0$ geben, d. h.

$$\bigcup_\nu T(W_\nu) = \Gamma \qquad (1,6)$$

für jedes Trägersystem, das einem vollständigen Orthogonalsystem zugeordnet ist. Aus (1, 5) ergibt sich $c(x) = 1/W_\nu(x)$ für $x \in T(W_\nu)$ und daher endgültig:

$$w[W; W_\nu] = \int\limits_{T(W) \cap T(W_\nu)} W(x)\, d\tau = \int\limits_{T(W) \cap T(W_\nu)} W_\nu(x)\, d\tau. \quad (1,3')$$

Bisher haben wir nur Zustände φ bzw. statistische Operatoren $\Omega = P_\varphi$ betrachtet. Es folgt aber leicht, daß (1, 4) erfüllt ist, wenn wir dem statistischen Operator $\Omega = P_{\mathfrak{r}_n}/n$, wo

$$P_{\mathfrak{r}_n} = \sum_{i=1}^{n} P_{\varphi i} \quad \text{auf } \mathfrak{r}_n(\varphi_1 \ldots \varphi_n) \text{ projiziert,}$$

zuordnen:

$$W_{\mathfrak{r}_n}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} W_i(x);\ \ T(W_{\mathfrak{r}_n}) = \bigcup_{\nu=1}^{n} T(W_\nu).$$

Während $W_{\mathfrak{r}_n}(x)$ nicht eindeutig gegeben ist (denn zu jedem Orthogonalsystem in $\mathfrak{r}_n$ gehört ein anderes; ebenso könnte man den Mittelwert all dieser nehmen), ist dies für den Träger $T(W_{\mathfrak{r}_n})$ der Fall. Denn mit $\psi \perp \mathfrak{r}_n$ ist

$$\mathrm{Sp}(\Omega P_\psi) = \int\limits_{T(W_{\mathfrak{r}_n}) \cap T(W_\psi)} W_{\mathfrak{r}_n}(x)\, d\tau = 0,$$

$$\text{also } T(W_{\mathfrak{r}_n}) \cap T(W_\psi) = 0$$

und andererseits mit $\varphi \in \mathfrak{r}_n$:

$$\mathrm{Sp}(P_\varphi P_{\mathfrak{r}_n}) = \int\limits_{T(W_\varphi) \cap T(W_{\mathfrak{r}_n})} W_\varphi(x)\, d\tau = 1,$$

$$\text{also } T(W_\varphi) \cap T(W_{\mathfrak{r}_n}) = T(W_\varphi).$$

Dadurch ist $T(W_{\mathfrak{r}_n})$ festgelegt, wenn alle $T(W_\chi)$ gegeben sind. Wir können nun die Teilräume des HILBERT-Raumes $\mathfrak{r}', \mathfrak{r}'', \ldots$ den entsprechenden Trägern $T(W_{\mathfrak{r}'});\ T(W_{\mathfrak{r}''}), \ldots$ eindeutig zuordnen. Diese Zuordnung kann natürlich kein Verbandsisomorphismus sein, denn die Träger T liegen in Γ, einem nach Voraussetzung distributiven Verband, während das für den Verband der Teilräume des HILBERT-Raumes nicht zutrifft. Immerhin gilt folgendes: Sei

$$\mathfrak{r}_j \longleftrightarrow T(W_{\mathfrak{r}_j});\quad j = 1, 2,$$

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{r}_1 \cup \mathfrak{r}_2 \longleftrightarrow T(W_\mathfrak{R});\quad \mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1 \cap \mathfrak{r}_2 \longleftrightarrow T(W_\mathfrak{r});$$

dann ist

$$\begin{aligned} T(W_\mathfrak{R}) &\supseteq T(W_{\mathfrak{r}_1}) \cup T(W_{\mathfrak{r}_2}), \\ T(W_\mathfrak{r}) &\subseteq T(W_{\mathfrak{r}_1}) \cap T(W_{\mathfrak{r}_2}). \end{aligned} \qquad (1,7)$$

Beweis: Die Dimensionen von $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{r}$ seien n_1, n_2, N, n. Dann ist einerseits

$$\int\limits_{T(W_{\mathfrak{r}_j})} W_{\mathfrak{r}_j}(x)\, d\tau = \int\limits_{T(W_\mathfrak{R})} W_\mathfrak{R}(x)\, d\tau = \int\limits_{T(W_\mathfrak{r})} W_\mathfrak{r}(x)\, d\tau = 1,$$

andererseits nach (1, 4)

$$1 = \mathrm{Sp}\left(\frac{P_{\mathfrak{r}_j}}{n_j} \cdot P_\mathfrak{R}\right) = \int\limits_{T(W_{\mathfrak{r}_j}) \cap T(W_\mathfrak{R})} W_{\mathfrak{r}_j}(x)\, d\tau,$$

$$1 = \mathrm{Sp}\left(\frac{P_\mathfrak{r}}{n} \cdot P_{\mathfrak{r}_j}\right) = \int\limits_{T(W_\mathfrak{r}) \cap T(W_{\mathfrak{r}_j})} W_\mathfrak{r}(x)\, d\tau.$$

Durch Vergleich folgt die Behauptung.

Die Bewegungsgleichung in Γ muß derjenigen im HILBERT-Raum offenbar in folgender Weise entsprechen:

Gehöre zu $P_{\mathfrak{r}(0)}$ die Verteilung $W_{\mathfrak{r}(0)}(x)$ mit Träger $T(W_{\mathfrak{r}(0)})$ und zu $P_{\mathfrak{r}(t)} = e^{iHt} P_{\mathfrak{r}(0)}\, e^{-iHt}$ ein $W_{\mathfrak{r}(t)}(x)$ mit Träger $T(W_{\mathfrak{r}(t)})$. Dann muß die Bewegungsgleichung $x(t) = f[x(0); t]$ der Punkte

$x \in \Gamma$ derart sein, daß aus $x(0) \in T(W_{\mathfrak{r}(0)})$ folgt $x(t) \in T(W_{\mathfrak{r}(t)})$. Ferner muß

$$\int\limits_{G(t) \subset T(W_{\mathfrak{r}(t)})} W_{\mathfrak{r}(t)}\,[x(t)]\;\mathrm{d}\tau(t)$$

übereinstimmen mit

$$\int\limits_{G(0) \subset T(W_{\mathfrak{r}(0)})} W_{\mathfrak{r}(0)}\,[x(0)]\;\mathrm{d}\tau(0)\,.$$

(Die Wahrscheinlichkeitsverteilung „schwimmt mit", genau so wie im Phasenraum der klassischen Physik.)

Daraus folgt

$$W_{\mathfrak{r}(t)}\,\{f[x(0)\,;t]\}\left|\frac{\partial f[x(0)\,;t]}{\partial x(0)}\right| = W_{\mathfrak{r}(0)}\,[x(0)]\,. \tag{1,8}$$

2. Aufstellung eines Modells

Die in Abschnitt 1 hergeleiteten Beziehungen sind als Bedingungen an eine mögliche determinierte Theorie zu werten, die man der Quantentheorie zuordnen will. Um sie zu veranschaulichen und ihre Widerspruchsfreiheit zu zeigen, wollen wir für den zweidimensionalen Spinraum den Parameterraum und die zugehörigen Größen explizit konstruieren.

Ein Vektor des Spinraumes hat die allgemeine Form:

$$\chi = \alpha\,\chi_1 + \beta\,\chi_2\,, \quad \alpha = e^{-i\,\varphi/2}\cos\frac{\vartheta}{2}\,, \quad \beta = e^{i\,\varphi/2}\sin\frac{\vartheta}{2}\,,$$

$$\chi_1 = \binom{1}{0}, \qquad \chi_2 = \binom{0}{1}$$

und kann als Eigenvektor von

$$\sigma(\vartheta, \varphi) = \sin\vartheta\cos\varphi\;\sigma_1 + \sin\vartheta\sin\varphi\;\sigma_2 + \cos\vartheta\;\sigma_3$$

der Richtung (ϑ, φ) zugeordnet werden. Daher liegt es nahe, als VP-Raum die Oberfläche der Einheitskugel zu nehmen. Nach $(1,5) - (1,6)$ sind die Träger zu zwei orthogonalen Vektoren dann jeweils zwei Oberflächenhälften. Zu χ_1, χ_2 z. B. gehören die Kugelhälften um $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$. Zu χ_1 (und analog zu jedem anderen χ) gehöre ferner eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $W(\vartheta)$; $0 \leqq \vartheta \leqq \pi/2$ mit

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\vartheta=0}^{\pi/2} W(\vartheta)\,\sin\vartheta\;\mathrm{d}\vartheta\;\mathrm{d}\varphi = 1\,.$$

$W(\vartheta)$ bestimmt sich nun daraus, daß wegen

$$|(\chi, \chi_1)|^2 = \cos^2\vartheta/2$$

nach $(1,3')$ und $(1,4)$ sein muß:

$$\int\limits_{\Omega(\vartheta)} W(\vartheta')\;\mathrm{d}\Omega' = \sin^2\vartheta/2\,, \tag{2,1}$$

wobei über den aus der Zeichnung ersichtlichen Oberflächensektor zu integrieren ist (s. Abb. 1).

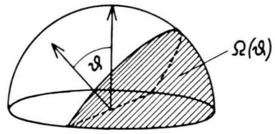

Abb. 1.

Nach einigen Umformungen ergibt sich für $W(\vartheta)$ eine VOLTERRAsche Integralgleichung vom ABELschen Typ mit der Lösung

$$W(\vartheta) = \frac{1}{\pi}\cos\vartheta; \quad 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}\,. \tag{2,2}$$

Eine Messung des quantenmechanischen Zustandes χ_1 würde also im VP-Raum die Richtung nicht eindeutig festlegen, sondern die Verteilung (2, 2) ergeben. Die Bewegung im Spinraum erfolgt mit einem $U(t) = e^{iHt}$

$$H = a_j\,\sigma_j + b\;\,1\,; \quad a_j\,,\, b \quad \text{reell.}$$

$b\,1$ ändert nur die Phase und ist für die Zuordnung uninteressant; daher $b = 0$. Ordnen wir $U(t)$ als Darsteller einer Drehung im Spinraum die entsprechende Drehung um die Richtung $\mathfrak{a}(a_j)$ im VP-Raum zu, so erfüllt diese als Bewegungsgleichung die Bedingung (1, 8).

Es muß offen bleiben, ob sich auch zu einem HILBERT-Raum in ähnlicher Weise ein VP-Raum konstruieren läßt. Die Entscheidung dieser Frage hätte folgende Konsequenzen: Kann man auch einem HILBERT-Raum $\mathfrak{H}$ einen VP-Raum Γ in der oben beschriebenen Weise zuordnen, dann ist es möglich, physikalische Systeme als im Prinzip determiniert zu betrachten; allerdings erhebt sich dann die Frage, warum keine genaueren Messungen als jene, die in Γ Wahrscheinlichkeitsverteilungen $W(x) \longleftrightarrow \varphi$ festlegen, möglich sind. Gibt es dagegen kein derartiges Γ zu $\mathfrak{H}$, so bedeutet dies: Es ist nicht nur unmöglich, im Rahmen der Quantentheorie selbst determinierte (nichtstreuende) Zustände aufzufinden (vgl. Anm. [2]), sondern es kann auch keine umfassendere deterministische Theorie im Sinne unserer allgemeinen Definition geben, aus der die Quantentheorie durch Einschränkung der Meßmöglichkeiten hervorginge.

Herrn Prof. LUDWIG möchte ich für wertvolle Hinweise und Diskussionen zu dieser Arbeit sehr danken; ebenso den Herren J. SCHRÖTER und Dr. M. HEIL.